数理解析研究所講究録
660巻 1988年 45-51

Gevrey class での Fuchs双曲型方程式 (2)

(Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2))

上智大理工　田原 秀敏 (Hidetoshi Tahara)

論文[2]の中で，報告者は或る一群のFuchs双曲型作用素 P に対して次をみたす様な指数 σ (≥ 1) を求めました:

> もしも s が $1 < s < \sigma/(\sigma-1)$ をみたすならば
> $C^\infty([0,T],E^{\{s\}}(\mathbb{R}^n))$ 又は $C^\infty((0,T),E^{\{s\}}(\mathbb{R}^n))$ の
> 中で $Pu=f$ がうまく扱かえる.

ここでは，小松先生によって提起された次の問題を考えてみたいと思います.

> 問題: $s=\sigma/(\sigma-1)$ の所はどうなっているのか?

一般的な場合の結果は後の英文部分で述べることとして，ここでは

$$P = (t\partial_t)^2 - t^{2\kappa_1}\partial_{x_1}^2 - t^{2\kappa_2}\partial_{x_2}^2 + a(t,x)(t\partial_t) + t^{\ell_1}b_1(t,x)\partial_{x_1} + t^{\ell_2}b_2(t,x)\partial_{x_2} + c(t,x) \tag{1}$$

(但し，$(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$, $2\kappa_1, 2\kappa_2, \ell_1, \ell_2 \in \{1,2,\ldots\}$ とする) という例について少し解説しておきます.

§1. 既知の結果

P を(1)の作用素とすると，P は[2]で扱かわれた作用素の典型的な例であり，P に対する指数 σ は

$$\sigma = \max\left\{1, \frac{2\kappa_1-\ell_1}{\kappa_1}, \frac{2\kappa_2-\ell_2}{\kappa_2}\right\}$$

で与えられます． $\rho^2+a(0,x)\rho+c(0,x)=0$ の根を $\rho_1(x),\rho_2(x)$ とおきますと，論文[1][2]の結果より次が得られます．

定理 1 ([1])． P を(1)の作用素とし
(1) $\rho_1(x),\rho_2(x)\notin\{0,1,2,...\}$,
(2) $\sigma=1$,
(3) $a(t,x),b_1(t,x),b_2(t,x),c(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$
を仮定する． この時，$Pu=f$ は $C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ の中で一意可解である．

定理 2 ([2])． P を(1)の作用素とし
(1) $\rho_1(x),\rho_2(x)\notin\{0,1,2,...\}$,
(2) $1 < s < \sigma/(\sigma-1)$,
(3) $a(t,x),b_1(t,x),b_2(t,x),c(t,x)\in C^\infty([0,T],E^{\{s\}}(\mathbb{R}^2))$
を仮定する． この時，$Pu=f$ は $C^\infty([0,T],E^{\{s\}}(\mathbb{R}^2))$ の中で一意可解である．（但し，$E^{\{s\}}$ は帰納的なGevrey族関数の空間とする．）

そして，いま考えたい問題は次のとおりです．

$s=\sigma/(\sigma-1)$ の所はどうなっているのか?

§2. 観察

$s=\sigma/(\sigma-1)$ の所の様子を必要条件の方から観察してみることにします． 但し，Fuchs型作用素に対する必要条件の研究は殆どありませんのでここでは，P に対応する 次の非特性的な双曲型作用素

$$L = \partial_t^2 - t^{2\nu_1}\partial_{x_1}^2 - t^{2\nu_2}\partial_{x_2}^2 + a(t,x)\partial_t$$

$$+t^{p_1}b_1(t,x)\partial_{x_1} + t^{p_2}b_2(t,x)\partial_{x_2} + c(t,x)$$

（但し，$2\nu_1,2\nu_2,p_1,p_2\in\{0,1,2,...\}$, $b_1(0,x)\neq0$, $b_2(0,x)\neq0$ とする）に対する必要条件で代用することにします．

L と P の関係は $P=t^2L$ ということで，従って $\kappa_i=\nu_i+1$, $\ell_i=p_i+2$

となり，L に対する指数 σ_L は

$$\sigma_L = \max\left\{ 1,\ \frac{2\nu_1 - p_1}{\nu_1 + 1},\ \frac{2\nu_2 - p_2}{\nu_2 + 1} \right\}$$

で与えられます． いま，L の係数が解析的であると仮定しておきますと Ivriiの条件([3])を適用することができて次が得られます．

命題 L <u>に対するコーシー問題</u>

(E) $Lu=f,\ u|_{t=0}=\varphi,\ \partial_t u|_{t=0}=\psi$

<u>に対して次が得られる</u>．

1) (E) <u>は</u> $E^{\{s\}}$-<u>well-posed</u> $\Longrightarrow$ $1 < s < \sigma/(\sigma-1)$.

2) (E) <u>は</u> <u>locally</u>-$E^{\{s\}}$-<u>well-posed</u> $\Longrightarrow$ $1 < s < \sigma/(\sigma-1)$.

3) (E) <u>は</u> $E^{(s)}$-<u>well-posed</u> $\Longrightarrow$ $1 < s \le \sigma/(\sigma-1)$.

(但し，$\sigma=\sigma_L$，$E^{(s)}$ は射影的なGevrey族関数の空間とする.)

上の命題より，

<u>$s=\sigma/(\sigma-1)$ が扱かえそうなのは，方程式を</u>

<u>射影的な $E^{(s)}$ の中で考えたときに限る</u>

ということがわかります．

<u>注意</u> 多重度一定など多くの場合は " $s=\sigma/(\sigma-1)$の時でもlocalには $E^{\{s\}}$の中で解ける" となっているのですが，<u>今の場合は " $s=\sigma/(\sigma-1)$の時は $E^{\{s\}}$ ではlocalにも解けない</u>" となっています．この点が，かなり誤解されているようです．

§3. 結果

というわけで，$s=\sigma/(\sigma-1)$ を扱おうとするならば $E^{\{s\}}$を放棄して $E^{(s)}$の方で考えざるをえません． 次がこの報告の基本結果です．

定理 3. P <u>を</u>(1)<u>の作用素とし</u>

(1) $\rho_1(x),\rho_2(x)\notin\{0,1,2,...\}$,

(2) $1 < s \le \sigma/(\sigma-1)$,

(3) $a(t,x), b_1(t,x), b_2(t,x), c(t,x) \in C^\infty([0,T], E^{(s)}(\mathbb{R}^2))$

を仮定する． この時，Pu=f は $C^\infty([0,T], E^{(s)}(\mathbb{R}^2))$ の中で一意可解である．

文献表

[1] H. Tahara : Singular hyperbolic systems, III. On the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partial differential equation J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., 27 (1980), 465-507.

[2] H. Tahara : Singular hyperbolic systems, VI. Asymptotic analysis for Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes. J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 551-580.

[3] V.Ja. Ivrii : Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes. Sibirsk. Mat. Zh., 17 (1976), 1256-1270.

Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2)

H. Tahara

Department of Mathematics
Sophia University
Tokyo, 102 Japan

Let us condiser

$$P = (t\partial_t)^m + \sum_{\substack{j+|\alpha|\le m \\ j<m}} t^{\ell(j,\alpha)} a_{j,\alpha}(t,x)(t\partial_t)^j \partial_x^\alpha,$$

where $(t,x)=(t,x_1,\dots,x_n)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ $(T>0)$, $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_x=(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $m\in\mathbb{N}$ $(=\{1,2,\dots\})$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ $(=\{0,1,2,\dots\}^n)$,

$|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$ and $\partial_x^\alpha=(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\dots(\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$. Assume the following conditions.

(A_κ) $\ell(j,\alpha)\in\mathbb{Z}_+$ $(j+|\alpha|\le m$ and $j<m)$ satisfy

$$\left|\begin{array}{ll} \ell(j,\alpha)=\kappa_1\alpha_1+\dots+\kappa_n\alpha_n, & \text{when } j+|\alpha|=m \text{ and } j<m, \\ \ell(j,\alpha)>0, & \text{when } j+|\alpha|<m \text{ and } |\alpha|>0, \\ \ell(j,\alpha)\ge 0, & \text{when } j+|\alpha|<m \text{ and } |\alpha|=0 \end{array}\right.$$

for some $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)\in\mathbb{N}^n$.

(B) All the roots $\lambda_i(t,x,\xi)$ $(i=1,\dots,m)$ of

$$\lambda^m+\sum_{\substack{j+|\alpha|=m\\ j<m}} a_{j,\alpha}(t,x)\lambda^j\xi^\alpha=0$$

are <u>real</u>, <u>simple</u> and <u>bounded</u> on $\{(t,x,\xi)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\xi|=1\}$.

Then, P is a typical model of Fuchsian hyperbolic operators in t. The characteristic exponents $\rho_1(x),\dots,\rho_m(x)$ of P are defined by the roots of

$$\rho^m+\sum_{j<m} a_j(x)\rho^j=0,$$

where $a_j(x)=[t^{\ell(j,(0,\dots,0))}a_{j,(0,\dots,0)}(t,x)]|_{t=0}$ $(j<m)$.

Under (A_κ) and (B), we define indices σ (≥ 1) and $\sigma_{j,\alpha}$ (≥ 1) by

$$\sigma_{j,\alpha}=\max\left[1,\ \min_{\tau\in S_n}\left(\max_{1\le r\le n} M_{j,\alpha}(\tau,r)\right)\right],$$

$$\sigma=\max_{\substack{j+|\alpha|<m\\ |\alpha|>0}}\{\sigma_{j,\alpha}\},$$

where S_n is the permutation group of n-numbers and

$$M_{j,\alpha}(\tau,r)=\frac{\sum_{i=1}^r(\kappa_{\tau(i)}-\kappa_{\tau(r)})\alpha_{\tau(i)}+(m-j)\kappa_{\tau(r)}-\ell(j,\alpha)}{(m-j-|\alpha|)\kappa_{\tau(r)}}.$$

Then, for P satisfying (A_κ) and (B) we define Δ_P by

$$\Delta_P = \{(j,\alpha);\ \sigma_{j,\alpha}=\sigma\}.$$

For $\kappa=(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)\in\mathbb{N}^n$ and $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, we denote by $S_\kappa(\alpha)$ the set of all $\ell\in\mathbb{R}$ satisfying the following (i) and (ii): (i) $0<\ell<\kappa_1\alpha_1+\ldots+\kappa_n\alpha_n$, and (ii) there are $\tau\in S_n$ and $p\in\{1,\ldots,n-1\}$ such that

$$\begin{cases} \ell=\kappa_{\tau(1)}\alpha_{\tau(1)}+\ldots+\kappa_{\tau(p)}\alpha_{\tau(p)}, \\ \{\kappa_{\tau(1)},\ldots,\kappa_{\tau(p)}\} \ll \{\kappa_{\tau(p+1)},\ldots,\kappa_{\tau(n)}\}. \end{cases}$$

Here, $\{a_1,\ldots,a_p\}\ll\{b_1,\ldots,b_q\}$ means that $a_i<b_j$ for any i and j. Then, for P satisfying (A_κ) and (B) we define S_P by

$$S_P = \{(j,\alpha);\ \ell(j,\alpha)\in S_\kappa(\alpha)\}.$$

By $E^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ we denote the set of all functions $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfying the following: for any $h>0$ and any compact subset K of $\mathbb{R}^n$ there is a $C>0$ such that

$$\sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha f(x)| \le C\, h^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s \quad \text{for any } \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,$$

and by $C^\infty([0,T],E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$ we denote the set of all infinitely differentiable functions on $[0,T]$ with values in $E^{(s)}(\mathbb{R}^n)$] equipped with the usual Frechet topology.

In addition to (A_κ) and (B), assume the following:

(C) s satisfies (C-i) or (C-ii):

  (C-i) $1<s<(\sigma/(\sigma-1))$.

  (C-ii) $s=(\sigma/(\sigma-1))$ and $\Delta_P\cap S_P=\phi$.

(D) $a_{j,\alpha}(t,x)\in C^\infty([0,T],E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$ $(j+|\alpha|\le m$ and $j<m)$.

Then, wew have the following theorem.

THEOREM. Let P be as above. Assume that (A_κ),(B),(C),(D) hold and that $\rho_i(x)\notin\{0,1,2,\ldots\}$ holds for any $x\in\mathbb{R}^n$ and $1\le i\le m$.

Then, the equation $Pu=f$ is uniquely solvable in $C^\infty([0,T],E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$. Moreover, the solution has a dependence domain.

野海正俊氏(上智大)作成のワープロ(ZED)を使用しました.